

1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7. soru	Toplam

Adı Soyadı:

Numara:

MAT 212 ANALİZ IV DERSİ ARA SINAV SORULARI

1) Limit tanımını kullanarak $(\varepsilon, \delta$ ile verilen tanım) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} = 0$ olduğunu gösteriniz.

2) Aşağıdaki limitleri araştırınız.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{\|xy\|}$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ c) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2 + z^4)}{x^2 + y^2 + z^2}$

3) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right],$

$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right]$ ve $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ limitlerini bulunuz.

4) Dizisel süreklilik tanımını yapınız.

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$ olarak tanımlanan F fonksiyonunun $(0, 0)$

noktasında dizisel sürekli olduğunu gösteriniz. F fonksiyonu sürekli midir?

5) $H(x, y, z) = \begin{cases} \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x + z}{x^2 + y^2 + z^2} \right), & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 = (0, 0), & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}, \quad H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

fonksiyonu $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ noktasında sürekli midir? Nedenini açıklayınız.

6) $f(x, y, z) = (\sin(xyz), xz)$ fonksiyonu veriliyor. $J_f(\pi, 2, 4) = ?$ $D_f(\pi, 2, 4) = ?$

7) Türevlenebilme, Yönlü türev, Kısmi türev tanımlarını yapınız. Ayrıca

$f(x, y, z) = (x + y - 1)^2 + (2x - y - 3)^2$ fonksiyonunun $a = (1, 1, 0)$ noktasında $v = (2, 3, 0)$ vektörü yönündeki yönlü türevini bulunuz.

Not: 1. soru 10 diğer sorular 15'er puandır. Süre 100 dakikadır.

08.04.2025

Prof. Dr. Birsan Sağır Duyar

MAT 212 ANALİZ IV ARA SINAV SORULARININ ÇÖZÜMLERİ

1) Keyfi $\varepsilon > 0$ verilsin. $\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ olduğunda
 $(|x| < \delta, |y| < \delta \text{ olur})$ $\delta = \varepsilon$ seçilirse

$$\left| \frac{xy}{|x|+|y|} - 0 \right| = \frac{|x|}{|x|+|y|} \cdot |y| < |y| < \delta$$

$|f(x,y) - 0| < \varepsilon$ olur. Bu ise $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ demektir.

2) $y = mx$ için $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{\|xy\|} = \lim_{(x,mx) \rightarrow (0,0)} \frac{3xmx}{\|xmx\|} = \frac{3m}{\|m\|}$

olduğundan limit yoktur.

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-y(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x-y} = 0$ dir.

c) $(x_n, y_n, z_n) = (0, 0, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0, 0)$ dir fakat

$$f(x_n, y_n, z_n) = \frac{\sin(0^2 + 0^2 + \frac{1}{n^2})}{0^2 + 0^2 + \frac{1}{n}} = \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \rightarrow 0 \text{ (n} \rightarrow \infty \text{)}$$

$(x'_n, y'_n, z'_n) = (\frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0) \text{ (n} \rightarrow \infty \text{)}$ dir fakat

$$f(x'_n, y'_n, z'_n) = \frac{\sin(\frac{1}{n} + 0 + 0)}{\frac{1}{n} + 0 + 0} = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \text{ (n} \rightarrow \infty \text{)} \text{ dir.}$$

Dolayısıyla limit yoktur.

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{-y^2}{y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$

Ardışık limitler $1 \neq -1$ olduğundan $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ yoktur.

4) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dâzel sâreklidir: $(\Rightarrow) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ olan $\forall (x_n) \subset \mathbb{R}^n$

dizisi için $(x_n \neq 0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ dir.

$(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$ olan

keyfi $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$ dizisini alalım. Üç durum söz konusu.

• $x_n = 0, y_n \neq 0$ ise; $F(x_n, y_n) = F(0, y_n) = y_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

• $x_n \neq 0, y_n = 0$ ise; $F(x_n, y_n) = \frac{\sin(x_n y_n)}{y_n} = 0 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

• $x_n \neq 0, y_n \neq 0$ ise; $F(x_n, y_n) = \frac{\sin(x_n y_n)}{x_n y_n} = y_n \cdot \frac{\sin(x_n y_n)}{x_n y_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \cdot \frac{\sin(x_n y_n)}{x_n y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x_n y_n)}{x_n y_n} = 0 \text{ dir.}$$

0 halde $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$ olan $\forall (x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$

dizileri için $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, y_n) = F(0, 0) = 0$ elde edilmiştir.

Bu ise F nin $(0, 0)$ da sâreklî olması demektir.

$$5) H_1(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad H_2(x, y, z) = \frac{x + z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$H(x, y, z) = (H_1(x, y, z), H_2(x, y, z)) \text{ olur.}$$

$G_1(x, y, z)$ fonksiyonu $(0, 0)$ da sâreklîdir:

$\forall \varepsilon > 0, \|(x, y, z) - (0, 0, 0)\| < \delta$ iken, $|x| < \delta, |y| < \delta, |z| < \delta$

$$\text{örün, } |H_1(x, y, z) - 0| = \left| \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right| = \frac{|x|}{x^2 + y^2 + z^2} < |x| < \delta,$$

$\delta = \varepsilon$ seçilirse H_1 sâreklî olur.

$H_2(x, y, z) = \frac{x + z}{x^2 + y^2 + z^2}$ fonksiyonu $(0, 0, 0)$ da sâreklî

değildir: $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0, 0)$ ($n \rightarrow \infty$) için

$$H_2(x_n, y_n, z_n) = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{2/n}{3/n^2} = \frac{2}{3} \cdot n \rightarrow \infty \text{ ($n \rightarrow \infty$)},$$

$H_2(0, 0, 0) = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} H_2(x_n, y_n, z_n) = \infty$ old. H_2 sâreklî değil, abayısıyla H sâreklî değil.

⑥ $f_1(x, y, z) = \sin(xyz)$, $f_2(x, y, z) = xz$ olun.

$$Df(\pi, 2, 4)(x, y, z) = J_f(\pi, 2, 4) \cdot \begin{bmatrix} x - \pi \\ y - 2 \\ z - 4 \end{bmatrix}$$

$$J_f(\pi, 2, 4) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{(\pi, 2, 4)} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big|_{(\pi, 2, 4)} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \Big|_{(\pi, 2, 4)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{(\pi, 2, 4)} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_{(\pi, 2, 4)} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \Big|_{(\pi, 2, 4)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} yz \cos(xyz) \Big|_{(\pi, 2, 4)} & xz \cos(xyz) \Big|_{(\pi, 2, 4)} & xy \cos(xyz) \Big|_{(\pi, 2, 4)} \\ z \Big|_{(\pi, 2, 4)} & 0 \Big|_{(\pi, 2, 4)} & x \Big|_{(\pi, 2, 4)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 4\pi & 2\pi \\ 4 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

$$Df(\pi, 2, 4)(x, y, z) = \begin{bmatrix} 8 & 4\pi & 2\pi \\ 4 & 0 & \pi \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} x - \pi \\ y - 2 \\ z - 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} 8(x - \pi) + 4\pi(y - 2) + 2\pi(z - 4) \\ 4(x - \pi) + 0 \cdot (y - 2) + \pi(z - 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8x + 4\pi y + 2\pi z - 24\pi \\ 4x + \pi z - 8\pi \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{7} \quad D_{\vec{v}} f(1,1,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(1,1,0\right) + \left(\frac{2t}{\sqrt{13}}, \frac{3t}{\sqrt{13}}, 0\right) - f(1,1,0)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{2t}{\sqrt{13}}, 1 + \frac{3t}{\sqrt{13}}, 0\right) - f(1,1,0)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{5t}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(-2 + \frac{t}{\sqrt{13}}\right)^2 - 5}{t} = \left[\frac{0}{0}\right] \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\left(1 + \frac{5t}{\sqrt{13}}\right) \frac{5}{\sqrt{13}} + 2 \cdot \left(-2 + \frac{t}{\sqrt{13}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}}{4} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{10}{\sqrt{13}} \left(1 + \frac{5t}{\sqrt{13}}\right) + \frac{2}{\sqrt{13}} \left(-2 + \frac{t}{\sqrt{13}}\right) \right] \\
 &= \frac{10}{\sqrt{13}} - \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}
 \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \frac{(2,3,0)}{\|(2,3,0)\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, 0\right) \quad \text{birim vektör}$$